

Hvad er en god matematikbog?



Jeanette Axelsen, Vordingborg
Gymnasium og HF

Anmeldelse af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup: "Hvad er matematik?", forlaget L&R Uddannelse

I en tid hvor i- og e-bøger vinder større indpas, i en tid hvor hjemmesider dukker op med masser af matematikviden formidlet på en moderne måde og ganske gratis, i en tid hvor nogle skoler går så vidt som til at lave deres egne bogsystemer, da er der udkommet et nyt bogsystem, "Hvad er matematik?". Har vi hermed det bogsystem der bliver den næste generations undervisningsmateriale?

Den ydre struktur

"Hvad er matematik?" består af tre bøger: en C-bog som alle elever skal læse, en B-bog som kun elever på A- og B-niveau skal læse, og endelig en A-bog som er for elever på A-niveau. I C-bogen er der afsnit ud over kernestoffet der henvender sig særligt til elever på B- og A-niveau, og som C-eleverne derfor kan tillade sig at springe over med god samvittighed og uden at miste noget. Disse særlige afsnit er typisk

en fordybelse der tilgodeser bekendtgørelseskravene for de højere niveauer inden for emnet, så man ikke behøver at vende tilbage når elever vælger et højere niveau, men mens man er ved emnet, kan differentiere niveauerne på det enkelte hold. I B-bogen er det tilsvarende med henvendelse til A-niveau eleverne. Afsnittene kan også bruges som supplerende stof eller til de dygtige C-niveau elever med særlig interesse for faget.

Som skole kan man have stor gavn af denne struktur idet man kan købe C-bogen til alle elever der ikke får svært ved at skifte studieretning efter grundforløbet og dermed måske over til et nyt bogsystem. De to næste bøger i rækken behøver ikke at blive købt til en hel årgang, men kun til det antal klasser som skal have B-niveau og til sidst A-niveauet. Med denne struktur er man heller ikke afhængig af om eleverne vælger faget matematik som studieretningsfag eller som valgfag, idet bøgerne indeholder matematik til et niveau og ikke bygger på ad hvilken vej dette niveau opnås.

Men denne struktur indeholder også

nogle problemfelter. Når man skal kommunikere, er det vigtigt at have gjort sig klart hvilken målgruppe man skal nå ud til. Dette er der ikke noget nyt i. Men problemet ved at alle eleverne skal igennem C-bogen, er at målgruppen er meget spredt mht. forståelsesniveau, tilegnelse og engagement i matematik. Derfor vil det projekt at ramme målgruppen bredt være et problem idet især C-eleverne ikke nødvendigvis bliver tilgodeset her. For at de kan forstå eller blive fanget, så skal eksemplerne, sproget og anvendelserne være noget andet end det vil være tilfældet for B- og A-niveaueleverne. Og her vil nogle måske indskyde at det også gælder for en god del af B-niveaueleverne. For mange C-niveauelever er spørgsmålet "Hvad kan matematikken bruges til?" centralt for deres motivation, og derfor kan et emne som fx geometri i C-bogens kapitel 3 ikke blive spændende ved at se historisk på det. Det kan vise hvad man var nødt til engang, men for eleven anno 2014 giver det ikke motivation at se hvad man i det gamle Babylon gjorde for at løse geometriske problemer. De ved godt at verden ser anderledes ud i dag, og har man igennem sin folkeskoletid mistet troen på at man kan og vil matematik, så kan man snakke almindelse så meget man vil – matematik fænger ikke hvis ikke det kan bruges.

Det andet er at de tre niveauer har hver deres profil. Og selvom man ved at lave afsnit særlig henvendt til A- og B-niveaue, hvor man kan fremhæve A- og B-profilerne i faget, så ændrer det ikke på at C-profilen let kan komme til at drukne.



At vende tilbage til en struktur som Carstensen og Frandsens bøger fra 90'erne der var bygget op så hvert enkelt niveau havde sine egne bøger, dvs. B-niveaue, det 3-årige A-niveau eller det 2-årige B-niveau + det 1-årige A-niveau, er nok ikke realistisk i dag med den nuværende valgstruktur selvom den ville løse problemet mht. modtagergruppen og profilen på det enkelte niveau. Antallet af B- og A-hold er mere stabilt end måderne de opnås på. Måske ligger der et iboende problem i opbygningen af et bogsystem der skal dække så forskelligt. Det er gynger og karruseller.

Den indre struktur

Hver bog er bygget op over samme struktur. Alle kapitler bliver indledt med et afsnit som handler om hvordan emnet for kapitlet er opstået i historien, gennem

eksemplets kraft. Herfra fortælles om hvordan matematikken er i spil, hvilke personer der har været involveret, eller hvordan matematikken er opstået. Så man får igennem sin læsning en god historie om det emne man skal i gang med at lære. Herefter kommer matematikken med definitioner, sætninger og beviser for sætningerne. Undervejs er der indlagt små øvelser, der vises eksempler, og der kan også være små opgaver. Selve træningsopgaverne ligger i et kapitel for sig. Mere herom senere.

Bøgernes tilgang til matematikken veksler mellem en induktiv og deduktiv tilgang. Man kan altså starte i eksperimentet og herfra nå over til sætninger og beviser. Eksperimenter kan fx være simuleringer af forsøg lavet i CAS-værktøjerne, eller det kan være filer fra hjemmesiden med regneark som skal udfyldes, det kan være grafers udseende, og hele tiden skal strukturer findes og forsøgt beskrevet. Undervejs stilles der spørgsmål som eleven skal reflektere over.

I forhold til bekendtgørelsens mål om at elever skal lære at læse matematiske tekster og have en undersøgende tilgang til faget samt stille spørgsmål og søge svar, så vil brugen af dette bogsystem støtte op omkring intentionerne i bekendtgørelsen.

Bøgerne indeholder også en tydelig brug af CAS-værktøjer. Er man bekendt med TI-Nspire, vil man kunne genkende programmet i flere figurer, men bøgerne henviser aldrig til et konkret værktøj, men blot om det er et grafværktøj, et regneark eller andet. Det gode er at bøgerne

stiller brugerne frit mht. valg af CAS-værktøjet. Ulempen er at er man ikke ferm til sit CAS-værktøj, så kan det være svært at lave fx simuleringer. Et eksempel på dette er i C-bogens kapitel 0, afsnit 3, hvor man skal simulere forsøget det kendte eksempel med quizen med tre døre hvor der står en bil bag den ene dør og en ged bag de to andre, og hvor studieværten åbner en dør med en ged efter at man selv har valgt en dør. Og skal man så vælge om? Idéen med at lave simuleringen er god idet man via CAS-værktøjet kan lave et så stort antal forsøg at man kan give et godt bud hvis quizdeltageren må bruge en livline og ringe til en god matematikerven. Men det kræver også at jeg som underviser kan lave simuleringen for at kunne give det videre. Og her har det for mig ikke været nok at prøve at følge guiden i bogen samt den onlinehjælp jeg har til mit CAS-værktøj.

Som lærer kan jeg ikke lade være med at blive imponeret over dette bogsystems mængder af viden samlet på ét sted. Selvom man ved det er fire mands værk (og her mand i betydningen menneske), så kan jeg ikke lade være med at blive ydmyg over for den mængde af viden der her er præsenteret og med data, billeder og kilder der er citeret og vist. Som underviser er disse indledninger til kapitlerne guld værd for min egen horisontudvidelse og gør at man senere hen kan krydre sin undervisning med små anekdoter samt få en bevidsthed om hvordan ting er opstået, og hvornår og hvem der står bag. Bogens omslag på indersiden indeholder en tidslinje hvor

de store begivenheder er sat på, så man også kan få en tidslig fornemmelse af matematikkens udvikling.

Men jeg har også mødt flere kolleger der synes det er for meget. Ikke i forhold til os som undervisere, men i forhold til eleverne. Vil eleverne kunne og gide læse alle disse sider? Og er det skudt over målet både mht. mængde og niveauet? I forordet skriver forfatterne selv at det ikke er meningen at eleverne skal læse det hele. Man skal som underviser udvælge hvilke afsnit man finder vigtige at få med til holdets fortælling om matematik.

Jeg vil her komme med nogle eksempler på hvordan jeg i min undervisning har brugt disse indledende afsnit.

Logaritmefabrikken

Min nuværende 2.z, som har bl.a. matematik på A-niveau som studieretningsfag, fik i foråret i 1. g lektien at læse s. 204-212 ekskl. øvelserne i kapitel 6 i C-bogen, dvs. historien om logaritmefunktionerne og -tabellerne. Selv fandt jeg læsningen ganske spændende, men hvordan sikrede jeg mig nu elevernes læsning? Jeg lavede en quiz hvor man kunne få en præmie for 1.- og 2.-pladsen. Eleverne dystede mod hinanden i grupper og syntes det var sjovt at konkurrere. Det at læse lektien blev pludselig sjovt, og i forhold til studiekompetencer måtte de lære sig en teknik til at huske. Ord som fx interpolation blev undervejs drøftet idet flere havde studset over begrebet, og dermed opstod der en snak om udvikling af matematik og hjælpemidler.

Da jeg selv er fra en tid hvor vi havde tabeller – dog ikke til logaritmer, men til sandsynlighedsregning og statistik – så kunne jeg så fortælle fra egen skoletid om brugen af interpolation og forhåbentlig vise hvor hurtigt tingene også er gået de senere år – eller måske bare at jeg er ved at blive gammel.

Samme klasse har her i efteråret fået som lektie at læse afsnittet i B-bogen i kapitlet om integralregning som omhandler cirkelens kvadratur. Igen gav afsnittet anledning til en snak om mange forskellige historiske emner og begreber. Men det interessante i dette afsnit var hvordan dette hænger sammen med integralregning? At kunne tilnærme en figur (cirklen) man gerne ville vide noget om mht. beregning af areal, vha. en figur man har styr på (en polygon), syntes at være sammenhængen, og pludselig blev integralregning til noget med at beregne arealer under figurer der kunne beskrives vha. funktioner. Om eleverne har fået en idé om det klassiske matematiske problem, ved jeg ikke, men de har i hvert fald set en klassisk teknik med at finde en tilnærmet værdi til noget komplekst vha. noget simpelt og herfra prøve at gøre det generelt.

Nu kan man jo sige at disse elever er lette at få med på legen da de har valgt A-niveau som en del af pakken. Og denne klasse er i den henseende en drømme-klasse. Men jeg har også brugt bogmaterialet af på en HF-klasse med tilvalg af matematik på B-niveau. Og her ikke nødvendigvis som et positivt tilvalg af matematik. Jeg brugte til dette hold

kapitel 9 om bekræftende statistik fra C-bogen. Her fungerede afsnittet "Rets-sagsmetaforen" rigtig godt som en måde at få hjælp til at formulere konklusioner ved hypotesetest igennem en verden kendt fra TV, nemlig retssalen, og det at blive kendt skyldig eller uskyldig efter en introduktion til bekræftende statistik gennem det autentiske eksempel "Handskerne fra Jammerbugten". Eksemplerne i kapitlet viste noget om hvilke spørgsmål man kunne stille og besvare med hypotesetest, og det til et hold der i den grad ønskede at få svar på "Hvad kan matematik bruges til?". Flere elever kommenterede eksplicit at dette emne havde været noget af det bedste da de kunne se en anvendelse af stoffet.

Skulle man spille Djævlens advokat, så kan jeg nogle gange savne en sammenhæng mellem de spændende historiske afsnit med "etuderne" bagefter. Forfatterne selv skriver at "Stoffet i resten af kapitlet kan gennemgås uafhængigt af den indledende fortælling", men jeg mangler noget der kan binde tingene sammen så det historiske ikke bare bliver et "nå – sådan er det", og så kommer "den rigtige matematik" bagefter. Selvfølgelig er almen dannelse fint eller en perspektivering på stoffet, men som underviser kan jeg sagtens fristes til at springe det lange "læsestykke" over for at gå direkte til biddet, for hvad er det lige jeg vil sige med det første? Eller er det ikke vigtigere at fokusere på at træne eleverne til prøven uden hjælpemidler? Man skal tro på at det at bruge tid på de motiverende indledninger giver noget til

resten af forløbet, når man skal prioritere sin tid i undervisningen.

I-bogen

Bogsystemet findes også som i-bog. Fordelen her er at man altid har sine bøger med sig, man kan have alle tre bøger med på samme tid gennem alle tre år hvis man har faget i tre år, man kan få lov til at skrive i "bogen", og man har alle projekter og opgaver samlet i bogen hvilket ikke er tilfældet med papirudgaven. Her skal man købe en opgavebog ved siden af.

Den første version af i-bogen havde det problem at det var svært at give lektier for til eleverne. De kunne ikke finde ud af at søge i indekset hvis man fx gav kapitel 5, afsnit 2.4, for. For inden for hvert kapitel var der underkapitler, og ingen af siderne havde sidetal på, og man kunne aldrig se hvad nummeret på det overordnede kapitel var. Det sidste er stadig ikke løst. Man kan ikke se hvilket overordnet kapitel det pågældende afsnit man er inde på, hører ind under. Men man har indført en skyder som indeholder sidetal, og man kan derfor give sidetal for som lektie i stedet. Det er en rigtig stor forbedring. En anden stor forbedring er at man nu kan søge i bogen ved at indtaste et søgeord. Søger man fx på vektorprojektion, så kommer der flere muligheder op, og her kan man så se yderligere stikord på de afsnit der dukker op, hvorvidt det drejer som om projektion i planen eller i rummet, eller om det er projektionen af et punkt i planen eller af en linje i planen.

Og lige præcis her er i-bogen meget bedre end papirudgaven. For i bogen kan man ikke søge på ord, og det gør bogen til et meget ringe opslagsværk. Flere elever spørger efter søgemetoder i bogen, og der er kun bladremetoden.

Der er i i-bogen flere fordele at hente. Inden selve bogens afsnit er der et afsnit til underviseren. Klikker man sig ind her, ligger der links til fx vejledninger og læreplaner til bogens pågældende niveau så man får en samlet pakke hvor man kan finde information om det hele.

Alle opgaver og projekter ligger også samlet i i-bogens sidste kapitler. Man skal altså ikke ind og have noget ekstra købt som ved papirudgaven, og lige netop projekterne er en af de helt store gevinster i dette bogsystem. Projekterne indeholder "historier" om hvordan matematikken kommer i spil. Ikke bare som en god historie, men også i samspil med andre fag. Forfattergruppen har trukket på en del kolleger med andre fag rundt omkring for at få samspillet og det samspillende fag med på samme høje niveau som resten af bogens materiale. Og der er rigtig meget at vælge imellem. I forordet til bogen står der at "Bogen rummer betydeligt flere øvelser, end man normalt vil inddrage i undervisningen, så her må man foretage et valg". Og her må man sige at dette ikke kun gælder øvelserne, men således også opgaverne, projekterne og de indledende afsnit. Dette bogsystem kræver en lærerstyring – en guide til touren gennem bogen i indlæringsfasen. For der skal vælges ud.

Antallet af opgaver til træning kunne

ønskes større, men ser man på antallet af links på hjemmesiden som endnu ikke er færdiggjorte, så er det nok undervejs.

Men når det så er sagt, så kunne jeg godt ønske mig noget mere af i-bogen. Man har her ikke tænkt dette medies muligheder igennem. Det ligner for meget en bog med den udvidelse at man har kunnet lægge regneark med data ind, henviser til andre hjemmesider og lignende. Hvorfor her ikke få lavet små film der laver fortællingerne om matematikens brug, opståen og matematikere? Det ville i hvert fald fange eleverne på anden vis, som vi også ser i den store brug af sider som fx "Webmatematik" eller "Fri viden".

Hvad kan matematikbogen?

Efter i mange år at se lærebøger inden for matematik gå mere og mere på kompromis med argumentationen i beviser, fx inden for differential- og integralregningen, så går dette system den anden vej. I B-bogen ser vi de "klassiske" beviser, men i A-bogen uddybes både differential- og integralregningen ved fx at få defineret kontinuitet mere dybdegående og som man vil have set det i det gamle Kristensen & Rindung-system eller endnu tidligere. Man får altså her mulighed for at dyrke de gamle dyder og tilgodese de elever som kunne have særlig interesse for matematik og muligvis vil læse videre. Men ved at ville så meget får systemet en tendens til i A-bogen at blive en rodebutik på linje med Gyldendals bogsystem "Gymnasiematematik"

hvor differentialregningen falder i flere kapitler, og hvor især beviserne gemmes til senere, og man skal springe frem og tilbage. I A-bogen kan man retfærdiggøre noget af det idet der inden for differentialregningen er flere regneregler i spil end på B-niveauet, og begrebet sammensat funktion også passende kan introduceres. Men differentialkvotienten defineres nu ud fra en epsilonfunktion og kontinuitet, dvs. vi starter "forfra" igen, men med flere lag denne gang. I C-bogen ses der også en tendens til "rodebutik" hvor trigonometri i den retvinklede trekant er adskilt fra de vilkårlige trekanter, og det er selvom bekendtgørelsen kræver hele pakken på C-niveauet. Om det er for at tilgodese historierne bag, skal jeg ikke kunne sige, men det virker ikke logisk i min fortælling. Lidt bedre kan jeg acceptere adskillelsen af den beskrivende og bekræftende statistik i C-bogen idet førstnævnte er kernestof, og sidstnævnte kan inddrages som supplerende.

Som matematiker er jeg utrolig glad for bøgerne. Bøgerne emmer af matematikglæde og udstråler kvalitet i deres indhold pga. den matematiske grundighed. Som underviser er jeg også glad. Jeg føler mig i gode hænder i forhold til det faglige og pædagogiske samt alle fortællingerne. Jeg har masser af projekter og supplerende stof at vælge imellem og kaste mig ud i, og i forhold til at opfylde bekendtgørelsens krav stoler jeg på forfattergruppen som jo tæller en fagkonsulent i matematik ved både bogprojektets start og slutning. Jeg har som underviser så fået til opgave at vælge ud og guide

mine elever gennem bøgerne. Og selvom jeg ikke altid er enig i opbygningen, fx at gennemgå vektorer i planen parallelt med vektorer i rummet, så indeholder bøgerne overordnet set alt hvad jeg har brug for til mine elever.

Som elev skal jeg læse rigtig, rigtig meget, og jeg har brug for hjælp til at sortere i hvad jeg skal læse, hvilke øvelser jeg skal lave, og hvordan jeg skal læse det. Omvendt er der også hjælp at hente igennem fremhævingen af definitioner og sætninger, eksempler på hvordan man løser en opgave, eller hvordan "mellemregningerne" i beviser ser ud. Qua sit layout med masser af billeder med autentiske kilder, grafer og tabeller kan det forhåbentlig gøre det til en spændende og fængende bog.

Som elev har jeg svært ved at finde tilbage til sider jeg skal bruge i en konkret situation, for jeg har ikke så meget at søge efter. Der er ikke noget register at slå op i, og indholdsfortegnelsen indeholder overskrifter hvor jeg som elev ikke kan gennemskue hvor de konkrete formler og sætninger optræder. Som elev kan jeg have rigtig svært ved at få overblik over stoffet. Jeg kan savne en side efter hvert kapitel der opsummerer de definitioner og sætninger som er blevet præsenteret. Så jeg kan i høj grad bruge bogen i indlæringsfasen, men med hjælp fra læreren til at skelne vigtigt fra ikkevigtigt, men bogen er ikke så god til eksamenslæsning. Bogen er heller ikke målrettet mod eleven på C-niveau, men sigter højere i sin kommunikation.

Skulle jeg som elev vælge mellem pa-

pirbog og i-bog, så har jeg lettere ved at bruge i-bogen som opslagsværk i den udgave der foreligger i dag. Men det kan være svært at bevare overblikket også i i-bogen. Man kunne også tænke i-bogen meget mere radikalt som et læringsmedie helt anderledes indeholdende små quizzer, små film, animationer m.m., men gerne med samme ambitionsniveau mht. det matematiske indhold.

Alt i alt finder jeg værket imponerende og det bedste bud på markedet d.d. Men jeg tænker at gymnasieverdenen godt kunne bruge et værk mere som dyrkede profilerne på de enkelte niveauer mere målrettet. Det kan være svært helt at slippe tanken om at dette værk sigter for højt i forhold til hvor vores elever er i dag. Omvendt kan man også insistere på at de skal lære at læse matematiske tekster – læse for at lære og ikke for at få gode karakterer.